Programme de colle n°28

semaine du 27 au 31 mai

Notions vues en cours

Chapitre 32 : Intégration *(en complément de la semaine précédente)*

- Résultats d'intégration classiques pour les fonctions continues (ou C^1) : théorème fondamental de l'analyse, dérivation de $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, IPP, changement de variable
- Intégrale d'une fonction paire / impaire / périodique, valeur moyenne
- Somme de Riemann associée à une fonction f : définition, convergence
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange
- Continuité uniforme : définition, interprétation géométrique, théorème de Heine
- Propriété f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue

Chapitre 33 : Dénombrement

- Ensemble fini ou infini, cardinal d'un ensemble, notation $\text{card}(E)$ ou $|E|$, deux ensembles en bijection ont même cardinal
- Cardinal d'un sous-ensemble (dont cas d'égalité), de l'union (disjointe ou non), du complémentaire, de la différence, cardinal de $E \times F$, de F^E, de $\mathcal{P}(E)$, de $S(E)$
- Le cardinal de $f(E)$ est inférieur à celui de E, cas d'égalité ; si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité
- p-uplet (ou p-liste) d'un ensemble, nombre de p-uplets d'un ensemble fini, p-arrangement d'un ensemble, nombre A_n^p de p-arrangement d'un ensemble à n éléments, cardinal de S_n
- p-combinaison d'un ensemble, nombre $\binom{n}{p}$ de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments, rappels des formules $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ et du triangle de Pascal

Les exercices doivent concerner (environ) aux 2/3 le chapitre d'intégration et à 1/3 le chapitre de dénombrement.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **31 à 33**. *Des exemples de questions figurent ci-après.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Formule de Taylor avec reste intégral Chapitre 32, Théorème 32.24
2. Inégalité de Taylor-Lagrange Chapitre 32, Théorème 32.25
3. Sans démonstration – Pour un ensemble E de cardinal n : définition d'un p-uplet de E et nombre total de p-uplets possibles de E. Idem pour les p-arrangements. Idem pour les p-combinaisons. Chapitre 33, Propriété 33.12 (la définition de p-uplet est dans le paragraphe précédent), puis Définitions 33.13 et 33.16, Théorème 33.14 et 33.17

Exemples de questions libres :

Chapitre 31 :

- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est alternée" ?
- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est antisymétrique" ?
- Développer le déterminant suivant selon la seconde ligne : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. On écrira bien chaque terme du développement sans simplification supplémentaire, et on ne demande pas de terminer le calcul.
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Existe-t-il des formules pour le déterminant de $A + B$, de λA et de AB ? Si oui, les donner.
- Donner la formule qui fait intervenir une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (sans hypothèse particulière sur A) avec sa comatrice $\mathrm{Com}(A)$.

Chapitre 32 :

- Compléter : "Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que ..."
- Compléter : "Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que ..."
- Soit f une fonction continue. Sous quelles conditions sur α et β est-ce que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ est dérivable ? Donner l'expression de $\varphi'(x)$.
- Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue en termes de quantificateurs.

Chapitre 33 :

- On pose $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? Et de F dans E ?
- On pose $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ?
- Donner (éventuellement oralement) la définition d'un p-arrangement de E ; si $\mathrm{card}(E) = n$, combien y a-t-il de p-arrangements de E ?
- Si E est de cardinal n, combien y a-t-il de permutations de E ?
- Donner (éventuellement oralement) la définition d'une p-combinaison de E ; si $\mathrm{card}(E) = n$, combien y a-t-il de p-combinaisons de E ?